Sur les solutions singulières des équations différentielles simultanées.

PAR E. GOURSAT.

La théorie des intégrales singulières des équations différentielles a donné lieu depuis Lagrange à un grand nombre de travaux; l'un des plus connus est sans contredit le Mémoire de Mr. Darboux publié dans le Bulletin des Sciences Mathématiques (t. IV, 1873), dont les résultats sont aujourd'hui classiques. Je me suis proposé d'étendre les théorèmes de Mr. Darboux aux équations différentielles simultanées et aux équations d'ordre supérieur. La plupart des résultats auxquels on parvient ainsi pourraient, il est vrai, se déduire des propriétés établies dans le Mémoire du même auteur *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles;** mais, comme ces résultats sont indépendants de la théorie des équations aux dérivées partielles, il m'a paru intéressant de les établir directement.

1. Pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, je vais d'abord généraliser un des théorèmes fondamentaux sur les équations différentielles du premier ordre, démontré par Briot et Bouquet dans leur célèbre Mémoire sur ce sujet.† Considérons un système d'équations différentielles de la forme

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} &= f(x, y, z) = ax + by + cz + \ldots\ldots, \\ x\frac{dz}{dx} &= f_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où $f(x, y, z)$ et $f_1(x, y, z)$ sont des fonctions holomorphes des variables x, y, z dans le domaine du point $x = y = z = 0$. Proposons-nous de rechercher si ces équations admettent un système d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x.

---

* *Mémoires des Savants étrangers*, t. XXVII.

† *Journal de l'Ecole Polytechnique,* XXXVIème Cahier.

Si un tel système existe, il suffira, pour avoir les développements en séries, de calculer les dérivées successives de y et de z pour $x=0$; ces dérivées s'obtiendront comme il suit. Après n différentiations successives, les équations (1) donnent

$$x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+n\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^nz}{dx^n}+\ldots.,$$
$$x\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}+n\frac{d^nz}{dx^n}=\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{d^nz}{dx^n}+\ldots$$

si on y fait $x=y=z=0$, on obtient les relations

$$\left.\begin{aligned}(n-b)\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0-c\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right)_0 &= F\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0,\ldots.\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)_0\right],\\ -b_1\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0+(n-c_1)\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right)_0 &= F_1\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0,\ldots.\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)_0\right],\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

F et F_1 désignant des fonctions entières des dérivées

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0,\ldots.\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)_0.$$

Ces relations détermineront $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0$ et $\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right)_0$ au moyen des dérivées précédentes pourvu que le déterminant

$$(n-b)(n-c_1)-b_1c$$

soit différent de zéro. Par conséquent, si l'équation

$$(\omega-b)(\omega-c_1)-b_1c=0$$

n'admet pour racine aucun nombre entier positif, on pourra calculer de proche en proche toutes les dérivées successives

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0,\ldots.\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0\ldots.,$$
$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0,\ldots.\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right)_0\ldots.,$$

de sorte que, si les équations (1) admettent un système d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x, ce système est unique et les intégrales seront représentées par les développements en séries

$$y=\frac{x}{1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0+\ldots.,$$
$$z=\frac{x}{1}\left(\frac{dz}{dx}\right)_0+\frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0+\ldots.$$

les coefficients étant calculés comme on vient de l'indiquer. Tout revient à démontrer la convergence de ces développements pour des valeurs de x de module suffisamment petit. Ici cette démonstration présente une difficulté spéciale, provenant de ce que les valeurs de $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0$ et $\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_0$ ne s'obtiennent pas par les seules opérations d'addition et de multiplication. En effet, en résolvant les équations (2), on aura en général dans les seconds membres des termes précédés du signe —. On évite cette difficulté en opérant de la manière suivante. Ajoutons les équations proposées (1) après les avoir multipliées respectivement par deux constantes indéterminées λ et μ; il vient

$$x\frac{d(\lambda y+\mu z)}{dx}=(\lambda a+\mu a_1)x+(\lambda b+\mu b_1)y+(\lambda c+\mu c_1)z+\ldots. \tag{3}$$

Posons
$$\frac{\lambda b+\mu b_1}{\lambda}=\frac{\lambda c+\mu c_1}{\mu}=\omega,$$

ou
$$\lambda(b-\omega)+\mu b_1=0,$$
$$\lambda c+\mu(c_1-\omega)=0;$$

pour qu'on puisse satisfaire à ces relations par des valeurs de λ et μ qui ne soient pas toutes nulles, il faudra que ω soit racine de l'équation

$$(\omega-b)(\omega-c_1)-b_1c=0. \tag{4}$$

Soit ω_1 une racine de cette équation; on pourra satisfaire aux relations

$$\lambda(b-\omega_1)+\mu b_1=0,$$
$$\lambda c+\mu(c_1-\omega_1)=0$$

en prenant pour λ et μ des constantes dont l'une au moins ne sera pas nulle. Supposons par exemple λ différent de zéro; si on pose $\lambda y+\mu z=Y$, on pourra prendre Y et z pour inconnues à la place de y et de z et le système (1) sera remplacé par le système

$$\left.\begin{aligned}x\frac{dY}{dx}&=(\lambda a+\mu a_1)x+\omega_1 Y+\alpha x^2+\ldots,\\ x\frac{dz}{dx}&=a_1x+\frac{b_1}{\lambda}Y+\left(c_1-b_1\frac{\mu}{\lambda}\right)z+\alpha_1x^2+\ldots.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Remarquons encore que le coefficient de z dans la seconde équation est précisé-

ment la seconde racine ω_2 de l'équation (4). Si ω_2 est différent de ω_1, on pourra poser

$$Z = \frac{b_1}{\lambda} Y + (\omega_2 - \omega_1) z$$

et prendre Y et Z pour inconnues nouvelles; alors les équations en Y et Z prendrons la forme

$$x \frac{dY}{dx} = a'x + \omega_1 Y + \ldots.,$$

$$x \frac{dZ}{dx} = a_1'x + \omega_2 Z + \ldots.,$$

mais cette seconde transformation, qui n'est pas toujours possible, n'est pas essentielle. Pour ne pas multiplier les notations, je suppose qu'on ait commencé par ramener le systême primitif à la forme (5); alors le théorème général qu il s'agit de démontrer pourra s'énoncer ainsi.

Les équations

$$\left.\begin{aligned} x \frac{dy}{dx} &= ax + by + dx^2 + ey^2 + fz^2 + \ldots. = f(x, y, z), \\ x \frac{dz}{dx} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 x^2 + e_1 y^2 + f_1 z^2 + \ldots. = f_1(x, y, z), \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

où $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine du point $x = y = z = 0$, admet un systême d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x pourvu qu'aucun des coefficients b, c_1 ne soit égal à un nombre entier positif.

En différentiant successivement les équations (6), on obtient

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx},$$

$$x \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{dz}{dx},$$

$$x \frac{d^3y}{dx^3} + 2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d^2z}{dx^2},$$

$$x \frac{d^3z}{dx^3} + 2 \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f_1}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{d^2z}{dx^2},$$

. . . .

ce qui donne, en faisant $x = y = z = 0$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (1-b) = a,$$
$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 (1-c_1) = a_1 + b_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0,$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 (2-b) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + \dots + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)_0,$$
$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 (2-c_1) = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)_0 + \dots + 2\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 + b_1 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0;$$

. . . .

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{a}{1-b}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = \frac{a_1 + b_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_0}{1-c_1}, \\ &\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + \dots + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)_0}{2-b}, \\ &\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)_0 + \dots + 2\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 + b_1\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0}{2-c_1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Pour démontrer la convergence des développements ainsi obtenus, il suffit d'employer un artifice tout-à-fait analogue à celui par lequel Briot et Bouquet ont démontré le théorème correspondant dans le cas d'une seule équation. Supposons que les fonctions $f(x, y, z)$ et $f_1(x, y, z)$ soient développables en séries convergentes pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z de module inférieur à r, et soit M une limite supérieure du module de ces fonctions dans ce domaine. Posons

$$\begin{aligned} \phi(x, u, v) &= Ax + Bu + \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{u}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r}\right)} - M\left\{1 + \frac{x+u+v}{r}\right\} \\ &= Ax + Bu + M\left\{\frac{x^2+u^2+v^2+xu+xv+uv}{r^2} + \dots\right\}, \end{aligned}$$
$$\phi_1(x, u, v) = A_1 x + B_1 u + C_1 v + M\left\{\frac{x^2+u^2+v^2+xu+xv+uv}{r^2} + \dots\right\};$$

toutes des dérivées partielles des fonctions ϕ et ϕ_1, à partir des secondes, sont réelles et positives pour $x = u = v = 0$ et sont supérieures aux modules des dérivées correspondantes des fonctions f et f_1 pour $x = y = z = 0$. Nous prendrons pour

A, A_1, B_1 les modules de a, a_1, b_1 respectivement et pour B, C_1 des nombres positifs inférieurs à l'unité qui seront déterminés plus loin d'une facon plus précise.

Le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} u - \phi\ (x, u, v) = 0 \\ v - \phi_1(x, u, v) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

définit un système de fonctions holomorphes s'évanouissant avec x, car le déterminant fonctionnel des premiers membres se réduit à $(1 - B)(1 - C_1)$ pour $x = u = v = 0$. Dans un certain domaine autour de l'origine, ces fonctions seront représentées par des développements en séries convergentes

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x}{1}\left(\frac{du}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 + \dots\dots, \\ v &= \frac{x}{1}\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_0 + \dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dont on pourra calculer tous les coefficients au moyen des équations (8). En différentiant ces relations on a, en effet,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{dv}{dx}, \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi_1}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial\phi_1}{\partial v}\frac{dv}{dx}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dots\dots + \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}, \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} + \dots\dots + \frac{\partial\phi_1}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial\phi_1}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On en déduit, en faisant $x = u = v = 0$,

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{A}{1-B}, \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = \frac{A_1 + B_1\left(\frac{du}{dx}\right)_0}{1 - C_1}, \\ &\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 + \dots + 2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}\right)_0\left(\frac{du}{dx}\right)_0\left(\frac{dv}{dx}\right)_0}{1-B}, \\ &\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}\right)_0 + \dots + 2\left(\frac{\partial^2\phi_1}{\partial u\partial v}\right)_0\left(\frac{du}{dx}\right)_0\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 + B_1\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)_0}{1 - C_1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

On voit que tous ces coefficients sont réels et positifs. Puisqu'aucun des coefficients b, c_1 n'est un nombre entier, le module de $n - b$, où n est un nombre entier positif, reste supérieur à une certaine limite m et, en prenant le nombre B tel que $1 - B$ soit inférieur à m, on aura constamment

$$1 - B < |n - b|, \text{ ou } \frac{1}{1-B} > \left|\frac{1}{n-b}\right|;$$

on choisira de même le nombre positif C_1 de façon que l'on ait, pour toute valeur entière et positive de n,

$$1 - C_1 < |n - c_1|.$$

Cela posé, la comparaison des formules (7) et (10) nous montre que l'on aura

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|_0 < \left(\frac{du}{dx}\right)_0, \quad \left|\frac{dz}{dx}\right|_0 < \left(\frac{dv}{dx}\right)_0,$$
$$\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|_0 < \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0, \quad \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|_0 < \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_0$$

et, d'une manière générale,

$$\left|\frac{d^ny}{dx^n}\right|_0 < \left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)_0, \quad \left|\frac{d^nz}{dx^n}\right|_0 < \left(\frac{d^nv}{dx^n}\right)_0.$$

Les séries (9) étant convergentes dans un certain domaine autour de l'origine, il en sera de même *a fortiori* des séries

$$\frac{x}{1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots\ldots,$$
$$\frac{x}{1}\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 + \frac{z^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 + \ldots\ldots,$$

ce qui démontre le théorème.

Si nous revenons à la forme primitive des équations (1), nous pouvons énoncer la proposition générale suivante :

Les équations (1) *admettent un système d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x pourvu que l'équation*

$$(\omega - b)(\omega - c_1) - b_1 c = 0$$

n'admette pour racine aucun nombre entier positif. Un cas particulier de ce théorème a été démontré par Mr. Picard (Comptes-rendus, 1878).

(2). Nous allons maintenant étudier le cas où l'équation précédente admet pour racine un nombre entier positif; plusieurs cas sont à distinguer suivant qu'elle admet pour racines ou deux nombres entiers positifs.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un seul nombre entier positif racine de l'équation
$$(\omega - b)(\omega - c_1) - b_1 c = 0;$$
soit p cette racine et soit ω_2 la seconde racine. On pourra, comme on l'a vu plus haut, ramener le système d'équations proposées à la forme simple
$$x\frac{dy}{dx} = ax + py + dx^2 + \ldots,$$
$$x\frac{dz}{dx} = a_1 x + \omega_2 z + d_1 x^2 + \ldots.$$
On diminue les coefficients p et ω_2 d'une unité en posant
$$y = x\left(\frac{a}{1-p} + Y\right), \quad z = x\left(\frac{a_1}{1-\omega_2} + Z\right);$$
après $p - 1$ transformations de cette espèce, on sera ramené à un système d'équations de la forme suivante
$$\left.\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} &= ax + y + dx^2 + \ldots \\ x\frac{dz}{dx} &= a_1 x + c_1 z + d_1 x^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$
où $c_1 = \omega_2 - p - 1$ n'est pas un nombre entier positif.

En général ce système n'admet pas d'intégrales holomorphes s'evanouissant avec x; en effet, soit
$$y = A_0 x + A_1 x^2 + \ldots,$$
$$z = B_0 x + B_1 x^2 + \ldots$$
les développements en séries de ces intégrales. En substituant dans les équations (11), on aurait
$$x(A_0 + 2A_1 x + \ldots) = ax + (A_0 x + A_1 x^2 + \ldots) + x^2(\ldots)$$
et par suite
$$A_0 = A_0 + a;$$
ce qui exige que le coefficient a soit nul. Ainsi, *lorsque le coefficient a est différent de zéro, les équations* (11) *n'admettent pas d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x.*

Supposons maintenant que a soit nul; si on pose

$$y = \lambda x, \quad z = \mu x,$$

les équations (11) deviennent

$$x\frac{d\lambda}{dx} = x\{\alpha + \beta\lambda + \gamma\mu + \dots\},$$

$$x\frac{d\mu}{dx} = a_1 + \mu(c_1 - 1) + x\{\alpha_1 + \beta_1\lambda + \gamma_1\mu + \dots\};$$

la valeur initiale μ_0 de μ pour $x = 0$ doit vérifier la relation $a_1 + \mu_0(c_1 - 1) = 0$, tandis que la valeur initiale λ_0 de λ peut être choisie arbitrairement. Si on prend pour λ_0 une constante quelconque et si on pose

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda', \quad \mu = \frac{a_1}{1 - c_1} + \mu',$$

on aboutit au nouveau systême

$$x\frac{d\lambda'}{dx} = x\{\alpha' + \beta\lambda' + \gamma\mu' + \dots\},$$

$$x\frac{d\mu'}{dx} = (c_1 - 1)\mu' + x\{\alpha_1' + \beta_1\lambda' + \gamma_1\mu' + \dots\}$$

auquel on peut appliquer le théorème général démontré plus haut. Ainsi, *lorsque le coefficient a est nul, les équations* (11) *admettent une infinité d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x; ces intégrales dépendent d'une constante arbitraire λ_0.*

Supposons en second lieu que l'équation

$$(\omega - b)(\omega - c_1) - b_1 c = 0$$

admette pour racines deux nombres entiers positifs p et $p + q$ $(q \geqq 0)$. Par une série de transformations de même nature que les précédentes, on ramènera le systême proposé à la forme

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} &= ax + y + dx^2 + \dots, \\ x\frac{dz}{dx} &= a_1 x + b_1 y + qz + d_1 x^2 + \dots \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

le coefficient b_1 pouvant être pris égal à zéro lorsque q est supérieur à l'unité. On démontre, comme tout-à-l'heure que ce systême ne peut admettre d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x que si a est nul.

Si on a en même temps $q=1$, le système (12) devient

$$x\frac{dy}{dx}=y+dx^2+\ldots,$$
$$x\frac{dz}{dx}=a_1x+b_1y+z+d_1x^2+\ldots.$$

Il peut arriver que l'on ait aussi $b_1=0$; dans ce cas, en raisonnant comme plus haut, on démontrera que l'on doit avoir aussi $a_1=0$, et, si cette condition est satisfaite, on aura une infinité d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x car, en posant $y=\lambda x$, $z=\mu x$, on sera ramené à un système d'équations

$$\frac{d\lambda}{dx}=\phi(x,\lambda,\mu),$$
$$\frac{d\mu}{dx}=\phi_1(x,\lambda,\mu),$$

où les seconds membres sont des fonctions holomorphes de x, de λ et de μ et on pourra choisir arbitrairement les valeurs initiales λ_0, μ_0 des intégrales de ce système.

Si b_1 n'est pas nul, le changement de variables

$$y=\lambda x,\quad z=\mu x$$

conduit au nouveau système

$$x\frac{d\lambda}{dx}=x(\alpha+\beta\lambda+\gamma\mu+\ldots),$$
$$x\frac{d\mu}{dx}=a_1+b_1\lambda+x(\alpha_1+\beta_1\lambda+\gamma_1\mu+\ldots).$$

La valeur initiale λ_0 de λ sera donnée par la relation

$$a_1+b_1\lambda_0=0,$$

mais la valeur initiale μ_0 de μ reste arbitraire. En posant ensuite

$$\lambda=-\frac{a_1}{b_1}+\lambda',\quad \mu=\mu_0+\mu',$$

on arrive au système

$$x\frac{d\lambda'}{dx}=x(\alpha'+\beta'\lambda'+\gamma'\mu'+\ldots),$$
$$x\frac{d\mu'}{dx}=b_1\lambda'+x(\alpha_1'+\beta_1'\lambda'+\gamma_1'\mu'+\ldots)$$

auquel on peut appliquer le théorème général. Il existe donc une infinité d'intégrales holomorphes dépendant d'une constante arbitraire μ_0.

Il reste à examiner le cas où q est un nombre entier supérieur à l'unité; on peut se borner, comme on l'a vu, à considérer le système

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} &= y + dx^2 + \ldots, \\ x\frac{dz}{dx} &= a_1 x + qz + d_1 x^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

Si on pose $y = x(\lambda_0 + \lambda)$, $z = x\left(\frac{a}{1-q} + \mu\right)$, λ_0 désignant une constante indéterminée, on sera conduit à un système

$$x\frac{d\lambda}{dx} = x\phi(x, \lambda, \mu), \quad x\frac{d\mu}{dx} = a_2 x + (q-1)\mu + d_2 x^2 + \ldots.$$

Pour ce nouveau systême, les deux racines de l'équation en ω sont 0 et $q-1$; si q est plus grand que 2, en diminuant successivement ces racines par le procédé qui a été expliqué plus haut de $q-2$ unités on sera ramené finalement à un systême de la forme

$$x\frac{d\lambda^{(n)}}{dx} = a^{(n)}x + (2-q)\lambda^{(n)} + \ldots,$$
$$x\frac{d\mu^{(n)}}{dx} = a_1^{(n)}x + \mu^{(n)} + \ldots.$$

et ce systême admettra des intégrales holomorphes s'évanouissant avec x pourvu que $a_1^{(n)}$ soit nul. Comme ce coefficient dépendra en général de λ_0, on voit qu'on aura une équation pour déterminer les valeurs convenables de λ_0. Ayant pris pour λ_0 une racine de cette équation, on aura une infinité d'intégrales holomorphes dépendant d'une constante arbitraire $\mu_0^{(n)}$.

3. Le théorème général qui vient d'être démontré s'étend sans difficulté à des systêmes formés d'un nombre quelconque d'équations de la forme suivante:

$$\begin{aligned} x\frac{dy_1}{dx} &= a_1x + b_1y_1 + c_1y_2 + \ldots + l_1y_n + p_1x^2 + \ldots, \\ x\frac{dy_2}{dx} &= a_2x + b_2y_1 + c_2y_2 + \ldots + l_2y_n + p_2x^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x\frac{dy_n}{dx} &= a_nx + b_ny_1 + c_ny_2 + \ldots + l_ny_n + p_nx^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Un pareil système d'équations admet toujours un système unique d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x, pourvu qu'aucune des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} b_1 - \omega & c_1 & \dots & l_1 \\ b_2 & c_2 - \omega & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & c_n & \dots & l_n - \omega \end{vmatrix} = 0$$

ne soit égale à un nombre entier positif. Si $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ sont les n racines de cette équation, on commencera par ramener le système proposé à la forme

$$x\frac{dy_1}{dx} = a_1 x + \omega_1 y_1 + \dots + p_1 x^2 + \dots,$$
$$x\frac{dy_2}{dx} = a_2 x + b_2 y_1 + \omega_2 y_2 + \dots + p_2 x^2 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x\frac{dy_n}{dx} = a_n x + b_n y_1 + c_n y_2 + \dots + \omega_n y_n + p_n x^2 + \dots$$

et la démonstration s'achèvera comme dans le cas de deux équations. On discutera de la même façon le cas où l'équation en ω admet pour racines un ou plusieurs nombres entiers positifs.

On peut ramener à la forme précédente certains systêmes d'équations simultanées qui se présentent sous forme indéterminée. Considérons, pour fixer les idées, le système de trois équations

$$\frac{dx}{\Sigma A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}} = \frac{dy}{\Sigma A' x^{\alpha'} y^{\beta'} z^{\gamma'}} = \frac{dz}{\Sigma A'' x^{\alpha''} y^{\beta''} z^{\gamma''}}$$

où les trois dénominateurs sont nuls pour $x = y = z = 0$. Pour avoir les intégrales de ce système qui sont nulles pour $x = 0$, cherchons d'abord le degré infinitésimal de y et de z par rapport à x. Soit λ le degré de y et μ le degré de z; supposons que les termes écrits au dénominateur soient les termes de moindre degré en x après qu'on a fait la substitution. Il faudra que l'on ait

$$\alpha + \lambda\beta + \mu\gamma = \alpha' + \lambda\beta' + \mu\gamma' - \lambda + 1 = \alpha'' + \lambda\beta'' + \mu\gamma'' - \mu + 1,$$

ou

$$\alpha + \lambda(\beta + 1) + \mu(\gamma + 1) = \alpha' + 1 + \lambda\beta' + \mu(\gamma' + 1) = \alpha'' + 1 + \lambda(\beta'' + 1) + \gamma''.$$

Imaginons que l'on ait marqué les points de l'espace de coordonnées

$$(\alpha,\ \beta + 1,\ \gamma + 1),\ (\alpha' + 1,\ \beta',\ \gamma' + 1),\ (\alpha'' + 1,\ \beta'' + 1,\ \gamma'');$$

les relations précédentes expriment qu'il existe un plan

$$X+\lambda Y+\mu Z=p$$

passant par trois de ces points au moins et laissant tous les autres points et l'origine de côtés différents. La détermination de ces plans s'effectuera sans difficulté par une construction géométrique tout-à-fait analogue à la construction plane bien connue pour développer les racines d'une équation algébrique. Supposons que l'on ait trouvé des valeurs de λ et de μ répondant à la question; ces valeurs seront commensurables et on pourra poser

$$\lambda=\frac{p}{r}, \quad \mu=\frac{q}{r},$$

p, q, r étant trois nombres entiers positifs sans facteur commun. Si dans les équations proposées on fait le changement de variables

$$x=t^r, \quad y=t^p u, \quad z=t^q v,$$

elles deviennent, après supression d'un facteur commun,

$$t\frac{du}{dt}=\frac{r(A'u^{\beta'}v^{\gamma'}+\ldots.)-pu(Au^{\beta}v^{\gamma}+\ldots.)}{Au^{\beta}v^{\gamma}+\ldots.},$$
$$t\frac{dv}{dt}=\frac{r(A''u^{\beta''}v^{\gamma''}+\ldots.)-qv(Au^{\beta}v^{\gamma}+\ldots.)}{Au^{\beta}v^{\gamma}+\ldots.}.$$

Les valeurs initiales u_0, v_0 de u et v pour $t=0$ sont déterminées par les équations simultanées

$$r(A'u_0^{\beta'}v_0^{\gamma'}+\ldots.)-pu_0(Au_0^{\beta}v_0^{\gamma}+\ldots.),$$
$$r(A''u_0^{\beta''}v_0^{\gamma''}+\ldots.)-qv_0(Au_0^{\beta}v_0^{\gamma}+\ldots.).$$

Soient u_0, v_0 une solution de ce système; en posant

$$u=u_0+U, \quad v=v_0+V,$$

on sera ramené à un système de la forme (1), pourvu que l'on n'ait pas en même temps

$$Au_0^{\beta}v_0^{\gamma}+\ldots.=0;$$

dans ce cas, on serait conduit à effectuer une nouvelle transformation de même espèce. On opérera de même dans le cas d'un nombre quelconque d'équations.

4. L'étude des intégrales non holomorphes du système (1) serait sans doute très-intéressante; mais, comme cette étude n'est pas essentielle pour la suite, je la laisse de côté dans ce travail. Je m'occuperai seulement du cas particulier où

les racines de l'équation en ω ont toutes les deux leur partie réelle négative. Il importe de définir exactement ce qu'on doit entendre par intégrales s'évanouissant avec x. Je suppose que la variable x tend vers l'origine suivant un chemin de longueur finie ayant à l'origine une tangente déterminée, de façon que l'argument de x reste fini. En outre, je ne considère que des intégrales d'un degré infinitésimal déterminé par rapport à x, c'est-à-dire qui peuvent se mettre sous la forme $x^\lambda(\varkappa+\varepsilon)$, λ ayant sa partie réelle positive, $\varkappa$ étant une constante différente de zéro et ε une fonction de x qui tend vers zéro dans les mêmes conditions que la première. *Avec ces restrictions, le système* (1) *n'admet pas d'autres intégrales s'évanouissant avec x que les intégrales holomorphes lorsque les parties réelles des racines de l'équation en ω sont négatives.*

Soient ω_1, ω_2 les deux racines de l'équation en ω que je suppose distinctes pour fixer les idées; le système (1) pourra se ramener à la forme

$$x\frac{dy}{dx}=ax+\omega_1 y+dx^2+\ldots,$$
$$x\frac{dz}{dx}=a_1x+\omega_2 z+d_1x^2+\ldots.$$

Soient $y=y_1$, $z=z_1$ les intégrales holomorphes de ce système. En posant $y=y_1+u$, $z=z_1+v$ et en remplacant y_1 et z_1 par leurs développements en séries on est conduit aux équations

$$x\frac{du}{dx}=\omega_1 u+u\phi(x,u,v)+v\psi(x,u,v),$$
$$x\frac{dv}{dx}=\omega_2 v+u\phi_1(x,u,v)+v\psi_1(x,u,v)$$

où ϕ, ϕ_1, ψ, ψ_1 sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x, u, v sans termes constants. Je dis qu'un pareil système ne peut admettre d'intégrales de la forme

$$u=x^\lambda(\varkappa+\varepsilon),\quad v=x^\mu(\varkappa'+\varepsilon'),$$

les parties réelles de λ et de μ étant positives. En effet, supposons que la partie réelle de μ soit égale ou supérieure à la partie réelle de λ. En substituant les valeurs précédentes de u et de v dans la première des équations, on aura l'égalité

$$\lambda x^\lambda(\varkappa+\varepsilon)+x^{\lambda+1}\frac{d\varepsilon}{dx}=\omega_1 x^\lambda(\varkappa+\varepsilon)+x^\lambda(\varkappa+\varepsilon)\phi(x,u,v)+x^\mu(\varkappa'+\varepsilon')\psi(x,u,v),$$

ou, en divisant par x^λ,

$$(\varkappa + \varepsilon)(\lambda - \omega_1) = -x\frac{d\varepsilon}{dx} + (\varkappa + \varepsilon)\phi(x, u, v) + x^{\mu-\lambda}(\varkappa' + \varepsilon')\psi(x, u, v).$$

Imaginons maintenant que x tende vers zéro suivant un chemin de longueur finie ayant une tangente à l'origine ; les deux termes

$$(\varkappa + \varepsilon)\phi(x, u, v), \quad x^{\mu-\lambda}(\varkappa' + \varepsilon')\psi(x, u, v)$$

tendent vers zéro. Il doit en être de même du produit $x\frac{d\varepsilon}{dx}$, au moins pour une certaine loi de décroissement de x. Supposons en effet que le module de $x\frac{d\varepsilon}{dx} = \pi(x)$ reste constamment supérieur à une certaine limite m. De la relation

$$x\frac{d\varepsilon}{dx} = \pi(x)$$

on tire

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\varepsilon}{\pi(x)}$$

et

$$L\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = \int_{x_0}^{x_1}\frac{d\varepsilon}{\pi(x)};$$

lorsque x_0 tend vers zéro, le module du premier membre augmente indéfiniment tandis que le second conserverait une valeur finie ; ce qui est impossible. Le premier membre de la relation précédente doit donc tendre vers zéro avec x, ce qui ne peut avoir lieu que si $\lambda = \omega_1$. Mais alors la fonction $x^\lambda(\varkappa + \varepsilon)$ ne tendrait plus vers zéro avec x puisque la partie réelle de λ serait négative. On raisonnerait de même dans le cas où l'équation en ω aurait ses racines égales.

Il est à remarquer que le théorème n'est plus vrai si une seule des racines de l'équation en ω a sa partie réelle négative. Par exemple, le système

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{2},$$
$$x\frac{dv}{dx} = -v + \frac{5}{2}u^3$$

admet l'intégrale

$$u = x^{\frac{1}{2}}, \quad v = x^{\frac{3}{2}}.$$

II.

5. Considérons une *congruence* de courbes, définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, a, b) = 0, \\ \phi(x, y, z, a, b) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

où a et b désignent deux constantes arbitraires. Par chaque point de l'espace il passe en général un nombre fini de ces courbes ; car, si l'on remplace dans les équations (13) x, y, z par les coordonnées x_0, y_0, z_0 de ce point, on a deux équations pour déterminer a et b. Si l'on joint aux équations (13) la nouvelle équation

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \phi}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \phi}{\partial a}=\frac{D(f,\phi)}{D(a,b)}=0, \tag{14}$$

on détermine sur chaque courbe de la congruence un certain nombre de points appelés *points focaux ;* le lieu de ces points focaux, quand on considère toutes les courbes de la congruence, forme en général une surface appelée *surface focale,* dont on obtiendra l'équation en éliminant a et b entre les équations (13) et (14) et qui se compose d'autant de nappes qu'il y a de points focaux sur chaque courbe de la congruence. Les courbes de la congruence sont tangentes en chacun de leurs points focaux aux différentes nappes de la surface focale. De plus, si l'on veut assembler les courbes de la congruence de façon à ce qu'elles aient une enveloppe, cette enveloppe sera située sur la surface focale et il est aisé de voir qu'elle sera définie par une équation différentielle du premier ordre. En effet, en chaque point A de la surface focale on connaît la direction de la tangente à la courbe de la congruence tangente à la surface en ce point et par suite la direction de la tangente à la courbe enveloppe qui passe par ce point.*

Regardons maintenant, dans les équations (13), y et z comme des fonctions de la variable indépendante x définies par ces équations, a et b ayant des valeurs constantes quelconques. Une différentiation par rapport à x nous donne les deux nouvelles relations

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'=0,$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}y'+\frac{\partial \phi}{\partial z}z'=0,$$

où

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad z'=\frac{dz}{dx}.$$

En éliminant a et b entre ces équations et les équations (13) on est conduit à un système d'équations différentielles de la forme

$$\left.\begin{aligned}F(x,y,z,y',z')=0,\\ \Phi(x,y,z,y',z')=0;\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

* Pour la démonstration de ces propriétés, voir le tome II de la *Théorie générale des surfaces* de Mr. Darboux. Livre IV, Chapitre 1er.

ces équations sont vérifiées par les fonctions y et z de x définies par les équations (13), quelles que soient les valeurs constantes attribuées aux paramètres a et b. Nous dirons pour abréger que les courbes de la congruence sont les courbes intégrales du système (15), et forment l'intégrale générale. Mais ces équations (15) admettent en outre une infinité d'autres intégrales non comprises dans l'intégrale générale ; en effet, puisque ces équations établissent une relation entre un point de l'espace et la tangente à la courbe intégrale qui passe par ce point, il est clair que toute courbe tangente en chacun de ces points à une courbe intégrale sera elle-même une courbe intégrale. Par suite, toutes les courbes enveloppes des courbes de la congruence sont aussi des intégrales du système (15), et il est clair qu'en général elles ne font pas partie des courbes de la congruence ; nous les appellerons *intégrales singulières*. Nous sommes donc conduits à la proposition suivante :

Les équations différentielles (15) *admettent une infinité d'intégrales singulières, qui sont définies par une équation différentielle du premier ordre.*

6. Voici comment on pourra obtenir la surface focale et les solutions singulières en partant des équations différentielles elles-mêmes. Une des propriétés caractéristiques de la surface focale est la suivante ; par chaque point de cette surface passent deux courbes intégrales tangentes l'une à l'autre, une courbe de la congruence et une courbe enveloppe située sur la surface focale. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point de cette surface et y_0', z_0' les valeurs correspondantes de y' et de z', relatives à ces deux intégrales. Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}$$

devra être nul pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $y' = y_0'$, $z' = z_0'$. En effet, si ce déterminant était différent de zéro, on tirerait des équations (15)

$$y' = y_0' + P(x - x_0, \ y - y_0, \ z - z_0),$$
$$z' = z_0' + Q(x - x_0, \ y - y_0, \ z - z_0),$$

P et Q désignant des séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, s'évanouissant pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. D'après le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles, on en déduirait pour y et z des séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - x_0$,

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \alpha \ (x - x_0)^2 + \ldots\ldots,$$
$$z = z_0 + z_0'(x - x_0) + \alpha_1 (x - x_0)^2 + \ldots\ldots;$$

il n'y aurait donc qu'une seule courbe intégrale tangente au point (x_0, y_0, z_0) à la droite

$$\frac{X-x_0}{1}=\frac{Y-y_0}{y'_0}=\frac{Z-z_0}{z'_0}.$$

Par conséquent, il faudra que pour tout point de la surface focale les équations (15) et l'équation

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}=0 \tag{16}$$

admettent une solution commune en y', z'. Ainsi, *on obtiendra l'équation de la surface focale en éliminant y' et z' entre les équations* (15) *et* (16).

Soit $P(x, y, z)=0$ l'équation ainsi obtenue ; les solutions singulières étant situées sur la surface focale, en éliminant z et z' entre les équations (15) et l'équation de cette surface, on aura une certaine équation différentielle du premier ordre

$$\psi(x, y, y')=0$$

qui définit les projections des solutions singulières sur le plan des xy.

Si on étudie de plus près le procédé précédent, il donne lieu à plusieurs remarques. Des équations (15) on déduit, en différentiant,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial z}z'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''+\frac{\partial F}{\partial z'}z''=0,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}y'+\frac{\partial \Phi}{\partial z}z'+\frac{\partial \Phi}{\partial y'}y''+\frac{\partial \Phi}{\partial z'}z''=0;\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

si on considère en particulier une intégrale singulière pour laquelle

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial \Phi}{\partial z'}-\frac{\partial F}{\partial z'}\frac{\partial \Phi}{\partial y'}=0,$$

on pourra éliminer y'' et z'' entre les deux équations (17) et on obtient ainsi les deux nouvelles relations

$$\left.\begin{aligned}\frac{D(F, \Phi)}{D(x, y')}+\frac{D(F, \Phi)}{D(y, y')}y'+\frac{D(F, \Phi)}{D(z, y')}z'=0,\\ \frac{D(F, \Phi)}{D(x, z')}+\frac{D(F, \Phi)}{D(y, z')}y'+\frac{D(F, \Phi)}{D(z, z')}z'=0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Les équations (16) et (18) se réduisent à deux équations distinctes ; néanmoins, pour plus de symétrie, je les conserverai toutes les trois. On voit donc que pour

tout point de la surface $P(x, y, z) = 0$ les équations (15), (16) et (18) doivent admettre une solution commune en y', z'. Or il est clair que, si les fonctions F et Φ sont quelconques, il n'existera pas de surface jouissant de cette propriété, et par conséquent il ne pourra exister d'intégrales singulières.

On peut encore s'en rendre compte comme il suit. La première des équations (15) exprime que la tangente à toute courbe intégrale passant en un point de coordonnées x, y, z est située sur un cône T ayant pour équation

$$F\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}, \frac{Z-z}{X-x}\right) = 0;$$

de même, la seconde équation (15) exprime que cette tangente est située sur un second cône T' ayant pour équation

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}, \frac{Z-z}{X-x}\right) = 0.$$

En général, ces deux cônes T, T' se coupent suivant un certain nombre de génératrices distinctes et à chacune de ces génératrices correspond une courbe intégrale passant par le point de coordonnées x, y, z. Mais, si ce point vient sur la surface $P(x, y, z) = 0$, les deux cônes T et T' deviennent tangents suivant une génératrice commune G et, pour qu'il y eût une solution singulière passant par ce point, il faudrait évidemment que cette génératrice G fût située dans le plan tangent à la surface au point considéré, c'est-à-dire que l'on eût, pour tout point de cette surface,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} y' + \frac{\partial P}{\partial z} z' = 0, \tag{19}$$

y' et z' désignant les solutions communes des équations (15) et (16). Voici un moyen très-simple de s'assurer que cela n'a pas lieu en général. Remplaçons dans les équations (15) y' et z' par $y' - m$, $z' - n$, m et n désignant deux constantes quelconques; nous ne changerons pas la surface $P(x, y, z)$ et la relation (19) deviendra

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}(y' - m) + \frac{\partial P}{\partial z}(z' - n) = 0,$$

relation qui ne pourra être vérifiée pour des valeurs quelconques de m et de n.

Ainsi *le procédé qui devrait conduire aux solutions singulières, appliqué à un système quelconque de la forme* (15), *ne fournit aucune solution. Un système quel-*

conque d'équations différentielles simultanées n'admet pas d'une manière normale d'intégrales singulières.

Ce théorème est tout-à-fait analogue, comme on voit, au théorème connu sur les équations différentielles du premier ordre,* et le paradoxe auquel on est conduit s'explique de la même façon. En effet, pour établir les propriétés des surfaces focales d'une congruence de courbes, on suppose implicitement, il est aisé de s'en assurer, que les fonctions f et ϕ sont des fonctions continues de x, y, z, a, b dans le voisinage des valeurs des variables qui vérifient les relations

$$f = 0,\ \phi = 0,\ \frac{D(f, \phi)}{D(a, b)} = 0.$$

Or, étant donné un systême quelconque d'équations différentielles de la forme (15), on sait bien qu'il admet une infinité d'intégrales dépendant de deux constantes arbitraires; mais rien ne prouve qu'on puisse mettre les équations des courbes intégrales sous la forme (13), les fonctions f et ϕ étant continues dans une étendue assez grande pour qu'on ait le droit d'appliquer la théorie des enveloppes. Nous pouvons même affirmer, d'après ce qui précède, qu'il n'en sera pas ainsi en général. Ainsi, tandis que les systêmes d'équations simultanées formées directement par l'élimination des constantes admettent d'une manière normale une infinité d'intégrales singulières, au contraire un systême d'équations différentielles pris arbitrairement ne pourra en avoir qu'à titre exceptionnel. Ceci nous montre qu'il est nécessaire, pour faire une théorie générale, de partir des équations différentielles elles-mêmes et non de leurs intégrales.

Il est bien clair d'ailleurs que les remarques précédentes n'enlèvent rien à l'intérêt des beaux théorèmes de Mr. Darboux sur les congruences de courbes, pas plus que nous ne devons rejeter la théorie des enveloppes parce que les solutions d'une équation différentielle du premier ordre n'admettent pas en général de courbe enveloppe.

7. Pour donner plus de précision aux raisonnements, je supposerai que les fonctions F et Φ sont des fonctions algébriques entières et irréductibles de x, y, z, y', z' et, comme il ne saurait être question de passer en revue tous les cas particuliers qui peuvent se présenter, je n'examinerai que les hypothèses les plus générales. Je négligerai d'ailleurs toutes les difficultés provenant de valeurs

---

* *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. IV, 1ère Série, 1873.

infinies de y' et de z', difficultés qu'on peut toujours faire disparaître par un changement de coordonnées.

Pour un point quelconque de l'espace de coordonnées x_0, y_0, z_0, les deux cônes T, T' qui ont pour équations

$$F\left(x_0, y_0, z_0, \frac{Y-y_0}{X-x_0}, \frac{Z-z_0}{X-x_0}\right)=0,$$
$$\Phi\left(x_0, y_0, z_0, \frac{Y-y_0}{X-x_0}, \frac{Z-z_0}{X-x_0}\right)=0$$

se coupent suivant p génératrices distinctes. Soient

$$\frac{Y-y_0}{y'_0}=\frac{Z-z_0}{z'_0}=X-x_0$$

les équations d'une de ces génératrices ; le déterminant

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}$$

n'étant pas nul pour $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, $y'=y'_0$, $z'=z'_0$, les équations (15) peuvent être résolues par rapport à y', z' et on en tire pour y', z' des développements en séries convergentes ordonnées suivant les puissances de $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$,

$$y'=y'_0+\alpha\,(x-x_0)+\beta\,(y-y_0)+\gamma\,(z-z_0)+\dots,$$
$$z'=z'_0+\alpha_1(x-x_0)+\beta_1(y-y_0)+\gamma_1(z-z_0)+\dots.$$

On en déduit pour y et z les développements en série

$$y=y_0+y'_0(x-x_0)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta y'_0+\gamma z'_0)(x-x_0)^2+\dots,$$
$$z=z_0+z'_0(x-x_0)+\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1 y'_0+\gamma_1 z'_0)(x-x_0)^2+\dots$$

qui seront convergents dans un certain domaine du point x_0. Ainsi, *par un point quelconque de l'espace il passe en général p courbes intégrales, à tangentes distinctes, n'ayant en ce point aucune singularité.*

Il n'en est plus de même pour un point de coordonnées x_0, y_0, z_0 pris sur la surface $P(x, y, z)=0$ dont on obtient l'équation en éliminant y' et z' entre les équations (15) et (16). En effet, pour tout point de cette surface, les deux cônes T, T' deviennent tangents. Pour rester dans le cas le plus général, je supposerai que ces deux cônes sont simplement tangents le long d'une génératrice G et se coupent en outre suivant $p-2$ génératrices distinctes. A chacune de ces $p-2$ tangentes correspond une courbe intégrale n'ayant au point considéré aucune

singularité. Il nous reste à rechercher les courbes intégrales tangentes à la droite G au point x_0, y_0, z_0.

Supposons qu'on ait pris pour origine des coordonnées le point x_0, y_0, z_0 lui-même et la droite G pour axe des x. Les équations (15) auront la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} A + By' + Cz' + Dy'^2 + \ldots\ldots &= 0, \\ A_1 + B_1y' + C_1z' + D_1y'^2 + \ldots\ldots &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$A, A_1, B, B_1, \ldots\ldots$ désignant des polynômes entiers en x, y, z tels que

$$A = A_1 = BC_1 - CB_1 = 0 \text{ pour } x = y = z = 0.$$

Les deux cônes T, T', relatifs à l'origine des coordonnées, auront pour équations

$$(B)_0 \frac{Y}{X} + (C)_0 \frac{Z}{X} + \ldots\ldots = 0,$$
$$(B_1)_0 \frac{Y}{X} + (C_1)_0 \frac{Z}{X} + \ldots\ldots = 0,$$

où $(M)_0$ désigne, d'une manière générale, ce que devient M quand on y fait $x = y = z = 0$. Comme, par hypothèse, ces deux cônes sont simplement tangents, l'un au moins des coefficients $(B)_0, (C)_0, (B_1)_0, (C_1)_0$ sera différent de zéro. Supposons par exemple $(B)_0 \neq 0$; on pourra résoudre la première des équations (20) par rapport à y' et on en tirera pour y' une fonction holomorphe de x, y, z, z' s'annulant en même temps que ces variables

$$y' = -\frac{C}{B} z' + \ldots\ldots$$

et en portant cette valeur de y' dans la seconde des équations (20) on obtiendra une relation de la forme

$$A_1 + \left(C_1 - \frac{B_1C}{B}\right) z' + Kz'^2 + \ldots\ldots = 0.$$

Cette relation, considérée comme une équation en z', admet deux racines nulles et deux seulement pour $x = y = z = 0$. Ces deux valeurs de z' peuvent être considérées comme racines d'une équation du second degré dont les coefficients sont holomorphes en x, y, z dans le voisinage de l'origine. En résolvant cette équation et en portant la valeur de z' dans l'expression de y', on obtiendra finalement pour y' et z' des expressions de la forme

$$\left.\begin{aligned} y' &= A(x, y, z) + p(x, y, z)\sqrt{C(x, y, z)}, \\ z' &= B(x, y, z) + q(x, y, z)\sqrt{C(x, y, z)}; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$, $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ étant des fonctions holomorphes de x, y, z dans le voisinage de l'origine, et les trois premières s'évanouissant à l'origine ; nous admettrons de plus, ce qu'on peut toujours faire, que le radical doit être pris avec la même détermination dans les deux formules. Ces deux systêmes de valeurs de y', z' deviennent égaux pour tout point dont les coordonnées vérifient la relation $C(x, y, z) = 0$; ceci nous montre que $C(x, y, z)$ doit être identique à $P(x, y, z)$ et, comme le plan tangent à cette surface $P(x, y, z) = 0$ ne doit pas contenir l'axe des x, on aura

$$C(x, y\ z) = ax + by + cz + dx^2 + \dots.$$

le coefficient a étant différent de zéro. Soit

$$A(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1x^2 + \dots,$$
$$B(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2x^2 + \dots;$$

faisons le changement de variables

$$x = x'^2, \quad y = ux'^2, \quad z = vx'^2,$$

les équations (21) deviennent

$$x'\frac{du}{dx'} = -2u + 2x'^2(a_1 + b_1u + c_1v + \dots) + 2x'p_1(x', u, v)\sqrt{a + bu + cv + \dots},$$

$$x'\frac{dv}{dx'} = -2v + 2x'^2(a_2 + b_2u + c_2v + \dots) + 2x'q_1(x', u, v)\sqrt{a + bu + cv + \dots};$$

les seconds membres de ces deux équations sont des fonctions holomorphes pour $x' = u = v = 0$ puisque le coefficient a est essentiellement différent de zéro. D'après le théorème général, démontré au §1, ces équations admettent un système unique d'intégrales s'évanouissant avec x', représentées par les séries convergentes

$$u = \alpha x' + \beta x'^2 + \dots,$$
$$v = \alpha_1 x' + \beta_1 x'^2 + \dots.$$

En revenant aux variables primitives x, y, z, nous voyons que les équations de la courbe intégrale sont les suivantes :

$$x = t^2,$$
$$y = \alpha t^3 + \beta t^4 + \dots,$$
$$z = \alpha_1 t^3 + \beta_1 t^4 + \dots;$$

cette courbe gauche possède un point de rebroussement à l'origine.

Ainsi, *la surface* $P(x, y, z) = 0$ *dont on obtient l'équation en éliminant* y' *et* z' *entre les trois équations*

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')} = 0$$

est en général le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

En chaque point de cette surface passe une courbe intégrale ayant un rebroussement en ce point, et la tangente de rebroussement est la génératrice de contact des deux cônes T, T' *relatifs à ce point.*

8. Une intégrale des équations proposées sera dite singulière si pour chaque élément de cette intégrale on a à la fois

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')} = 0,$$

de sorte que les théorèmes généraux sur les équations différentielles ne s'appliquent plus à cette intégrale. Toute intégrale de cette espèce, s'il en existe, sera nécessairement située sur la surface $P(x, y, z) = 0$, obtenue en éliminant y' et z' entre les trois équations précédentes. Il faudra de plus que pour tout point de cette surface, au moins pour une certaine portion de cette surface, la génératrice de contact des deux cônes T, T', relatifs à ce point, soit située dans le plan tangent à la surface en ce point. Cette condition nécessaire est aussi suffisante; car, si elle est remplie, on aura pour définir les solutions singulières une équation différentielle du premier ordre. Les fonctions F et Φ étant données, on pourra donc toujours reconnaître par des calculs algébriques s'il existe des solutions singulières et former l'équation différentielle qui les caractérise.

Cette recherche pourra être facilitée dans certains cas par l'application de la règle suivante. Nous avons vu que pour tout point d'une solution singulière les équations (15), (16) et (18) devaient admettre une solution commune en y', z'. Réciproquement, supposons que pour tout point d'une certaine surface $Q(x, y, z) = 0$, (où $Q(x, y, z)$ sera nécessairement un diviseur de $P(x, y, z)$) les équations

$$\left.\begin{aligned} & F(x, y, z, m, n) = 0, \ \Phi(x, y, z, m, n) = 0, \ \frac{D(F, \Phi)}{D(m, n)} = 0, \\ & \frac{D(F, \Phi)}{D(x, m)} + \frac{D(F, \Phi)}{D(y, m)} m + \frac{D(F, \Phi)}{D(z, m)} n = 0, \\ & \frac{D(F, \Phi)}{D(x, n)} + \frac{D(F, \Phi)}{D(y, n)} m + \frac{D(F, \Phi)}{D(z, n)} n = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

admettent une solution commune en m, n. Quand on se déplace sur cette surface, m et n sont des fonctions de deux variables indépendantes, de x et de y par exemple. En différentiant totalement les premières équations (22), on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial m}dm + \frac{\partial F}{\partial n}dn = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial \Phi}{\partial m}dm + \frac{\partial \Phi}{\partial n}dn = 0,$$

ou, en tenant compte de la relation $\frac{D(F, \Phi)}{D(m, n)} = 0$,

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(x, m)}dx + \frac{D(F, \Phi)}{D(y, m)}dy + \frac{D(F, \Phi)}{D(z, m)}dz = 0,$$
$$\frac{D(F, \Phi)}{D(x, n)}dx + \frac{D(F, \Phi)}{D(y, n)}dy + \frac{D(F, \Phi)}{D(z, n)}dz = 0.$$

Admettons que l'un au moins des six déterminants fonctionnels qui figurent dans ces formules, par exemple $\frac{D(F, \Phi)}{D(x, m)}$, ne soit pas nul ; le plan tangent à la surface $Q(x, y, z) = 0$ aura pour équation

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(x, m)}(X - x) + \frac{D(F, \Phi)}{D(y, m)}(Y - y) + \frac{D(F, \Phi)}{D(z, m)}(Z - z) = 0$$

et la quatrième des relations (22) exprime précisément que la droite

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{m} = \frac{Z - z}{n}$$

est située dans ce plan tangent ; et cette droite est la génératrice de contact des deux cônes T et T'. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsque pour tout point d'une surface $Q(x, y, z) = 0$ les équations (22) admettent un système de solutions communes en m, n, sans que les six déterminants fonctionnels

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(x, m)}, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(y, m)}, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(z, m)}, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(x, n)}, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(y, n)}, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(z, n)}$$

soient tous nuls pour ces valeurs de m et de n, les équations différentielles proposées admettent des solutions singulières.

Les intégrales singulières, si elles existent, peuvent être considérées comme les enveloppes d'autres intégrales. En d'autres termes, par chaque point de la surface $Q(x, y, z) = 0$ il passe, outre une intégrale singulière, une intégrale non singulière tangente à la première. Imaginons que nous ayons pris pour origine des coordonnées un point de la surface $Q(x, y, z) = 0$ et pour plan des xy le plan tangent en ce point, et soit

$$z = \phi(x, y)$$

l'équation de cette surface. Si on change z en $z + \phi(x, y)$, il est clair qu'une transformation de cette nature n'altère pas les relations de contact entre deux courbes; on peut donc supposer, pour la commodité du raisonnement, que la surface lieu des solutions singulières se réduit au plan des xy. Les deux systèmes de valeurs de y', z' qui deviennent égaux pour $z = 0$ seront donnés par des formules de la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} y' &= A(x, y, z) + p(x, y, z)\sqrt{z}, \\ z' &= B(x, y, z) + q(x, y, z)\sqrt{z}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ désignant des séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de x, y, z. En outre, comme z' doit être nul pour tout point du plan des xy, $B(x, y, z)$ doit contenir z en facteur dans tous ses termes et on peut écrire

$$B(x, y, z) = zB_1(x, y, z).$$

Si dans les équations (23) on fait $z = 0$, elles se réduisent à l'équation unique

$$\frac{dy}{dx} = A(x, y, 0)$$

qui détermine les solutions singulières. Si on pose d'autre part $z = u^2$, elles deviennent

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= A(x, y, u^2) + up(x, y, u^2), \\ 2\frac{du}{dx} &= uB_1(x, y, u^2) + q(x, y, u^2), \end{aligned}$$

et dans le voisinage de tout point $x = x_0$, $y = y_0$, $u = 0$, ces équations admettent un système d'intégrales holomorphes pour lequel u n'est pas identiquement nul. *Par chaque point (x_0, y_0) du plan des xy passe donc une nouvelle courbe inté-*

grale tangente à la solution singulière passant par ce point. Ce résultat est bien conforme à la théorie des solutions singulières faite en partant des congruences de courbes et de leurs surfaces focales.

9. La proposition générale, qui fait le principal objet de ce travail, peut être établie sans avoir recours au théorème sur les équations différentielles qui a été démontré au début. Considérons d'abord une équation différentielle du premier ordre

$$F(x, y, y') = 0 \tag{24}$$

où F est un polynôme entier irréductible en x, y, y'; intégrer cette équation, cela revient à exprimer x, y, y' en fonction d'une seule variable indépendante de façon à vérifier l'équation (24) et la nouvelle relation

$$dy - y'dx = 0.$$

Or le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{dy}{y'\frac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{dy'}{-\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}y'} \tag{25}$$

admet l'intégrale première $F(x, y, y') = \text{const.}$, et si l'on choisit les valeurs initiales x_0, y_0, y'_0 de façon à ce qu'elles vérifient l'équation $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ on aura aussi pour les intégrales

$$F(x, y, y') = 0, \quad dy - y'dx = 0.$$

L'intégration de l'équation (24) revient donc à l'intégration du système (25), les valeurs initiales vérifiant la relation

$$F(x_0, y_0, y'_0) = 0.$$

Cela posé, supposons que pour $x = x_0$, $y = y_0$ l'équation (24) admette une racine multiple d'ordre n, $y' = y'_0$. Portons l'origine au point x_0, y_0 et prenons pour nouvel axe des x la droite de coefficient angulaire y'_0. On aura alors

$$F(x, y, y') = P(x, y) + y'P_1(x, y) + y'^2P_2(x, y) + \ldots\ldots + y'^nP_n(x, y) + \ldots\ldots$$

les n polynômes $P(x, y)$, $P_1(x, y)$, ... $P_{n-1}(x, y)$ étant nuls pour $x = y = 0$, et $P_n(x, y)$ n'étant pas nul pour $x = y = 0$. Les équations (25) deviennent

$$\frac{dx}{P_1(x, y) + \ldots\ldots + (n-1)y'^{n-2}P_{n-2}(x, y) + \ldots\ldots}$$
$$= \frac{dy}{y'\{P_1(x, y) + \ldots\ldots\}} = \frac{dy'}{-\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}y'}.$$

Placons-nous dans le cas général où il n'existe pas de solution singulière; alors $\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y}$ ne sera pas nul pour $x = y = y' = 0$; les équations précédentes pourront s'écrire

$$\frac{dx}{dy'} = Q_1(x, y) + y' Q_2(x, y) + \ldots + y'^{n-2} Q_{n-2}(x, y) + y'^{n-1} Q_n(x, y) + \ldots,$$
$$\frac{dy}{dy'} = y' Q_1(x, y) + y'^2 Q_2(x, y) + \ldots + y'^{n-1} Q_{n-1}(x, y) + y'^n Q_n(x, y) + \ldots,$$

les coefficients $Q_1, Q_2, \ldots. Q_{n-1}$ étant nuls pour $x = y = 0$. Ces équations admettent un système d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec y', et il est aisé de voir que le développement de x commencera par un terme de degré n et celui de y par un terme de degré $n + 1$. La courbe intégrale sera donc représentée dans le voisinage de l'origine par les formules

$$x = \alpha y'^n + \ldots.,$$
$$y = \alpha_1 y'^{n+1} + \ldots.$$

Si $n = 2$, ce qui est le cas général, la courbe présente un point de rebroussement de première espèce; si $n > 2$, l'origine est un point singulier d'ordre plus élevé.

Etant donné un système d'équations simultanées

$$F(x, y, z, y', z') = 0, \quad \Phi(x, y, z, y', z') = 0,$$

on verra comme tout-à-l'heure que l'intégration de ce système revient à celui du système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{\frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}} = \frac{dy}{y' \frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}} = \frac{dz}{z' \frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}} \\ &= \frac{dy'}{\frac{D(F, \Phi)}{D(z', x)} + y' \frac{D(F, \Phi)}{D(z', y)} + z' \frac{D(F, \Phi)}{D(z', z)}} = \frac{dz'}{\frac{D(F, \Phi)}{D(x, y')} + y' \frac{D(F, \Phi)}{D(y, y')} + z' \frac{D(F, \Phi)}{D(z, y')}} \end{aligned}\right\}, \quad (26)$$

les valeurs initiales $x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0$ vérifiant les relations

$$F(x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0) = 0, \quad \Phi(x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0) = 0.$$

Supposons qu'en un point de coordonnées x_0, y_0, z_0 les deux cônes T, T' soient

tangents; si on choisit ce point pour origine et la génératrice de contact pour axe des x, on aura

$$F(x, y, z, y', z') = A + By' + Cz' + Dy'^2 + 2Ey'z' + Fz'^2 + \dots,$$
$$\Phi(x, y, z, y', z') = a + by' + cz' + dy'^2 + 2ey'z' + fz'^2 + \dots.$$

ou $A, B, C, D, E, F, \dots a, b, c, d, e, f, \dots$ sont des polynômes entiers en x, y, z, A et a étant nuls pour $x = y = z = 0$. Désignons d'une manière générale par L_0 ce que devient une fonction quelconque L de x, y, z quand on y fait $x = y = z = 0$; les deux cônes T, T' auront pour équations

$$B_0 \frac{Y}{X} + C_0 \frac{Z}{X} + D_0 \left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 2E_0 \frac{YZ}{X^2} + F_0 \left(\frac{Z}{X}\right)^2 + \dots,$$
$$b_0 \frac{Y}{X} + c_0 \frac{Z}{X} + d_0 \left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 2e_0 \frac{YZ}{X^2} + f_0 \left(\frac{Z}{X}\right)^2 + \dots.$$

Pour que ces deux cônes soient tangents suivant l'axe des x il faut que l'on aït $B_0 c_0 - b_0 C_0 = 0$. Nous pouvons même supposer que l'on a pris le plan tangent commun pour plan des xy. On aura alors

$$B_0 = b_0 = 0,$$

et nous admettrons que C_0 et c_0 ne sont pas nuls; autrement l'axe des x serait une génératrice double pour l'un des cônes T, T'. Ecrivons les premiers termes des déterminants fonctionnels qui figurent dans les formules (26);

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')} = Bc - Cb + 2y'(Dc - Cd + Be - Eb) + 2z'(Ec - Ce + fB - bF)$$
$$+ 4(De - Ed)y'^2 + 4(Df - Fd)y'z' + 4(Ef - Fe)z'^2 + \dots,$$

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(x, z')} = c\frac{\partial A}{\partial x} - C\frac{\partial a}{\partial x} + y'\left\{c\frac{\partial B}{\partial x} - C\frac{\partial b}{\partial x} + 2e\frac{\partial A}{\partial x} - 2E\frac{\partial a}{\partial x}\right\}$$
$$+ z'\left\{c\frac{\partial C}{\partial x} - C\frac{\partial c}{\partial x} + 2d\frac{\partial A}{\partial x} - 2D\frac{\partial a}{\partial x}\right\} + \dots,$$

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(x, y')} = b\frac{\partial A}{\partial x} - B\frac{\partial a}{\partial x} + y'\left\{b\frac{\partial B}{\partial x} - B\frac{\partial b}{\partial x} + 2d\frac{\partial A}{\partial x} - 2D\frac{\partial a}{\partial x}\right\}$$
$$+ z'\left\{b\frac{\partial C}{\partial x} - B\frac{\partial c}{\partial x} + 2e\frac{\partial A}{\partial x} - 2E\frac{\partial a}{\partial x}\right\} + \dots.$$

Pour $x = y = z = 0$, $\dfrac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}$ se réduit à

$$2y'(D_0 c_0 - C_0 d_0) + 2z'(E_0 c_0 - C_0 e_0) + \dots.$$

Le coefficient de y' ne sera nul que si on a $D_0c_0 - C_0d_0 = 0$, et cette relation exprime, il est aisé de s'en assurer, que les deux cônes T et T' ont un contact du second ordre suivant l'axe des x. De même pour $x = y = z = y' = z' = 0$, les deux derniers dénominateurs des formules (26) se réduisent respectivement à

$$\left(c\frac{\partial A}{\partial x} - C\frac{\partial a}{\partial x}\right)_0$$

et à zéro. Prenons le cas général où il n'existe pas de solution singulière ; alors, comme nous l'avons vu, on aura

$$\left(c\frac{\partial A}{\partial x} - C\frac{\partial a}{\partial x}\right)_0 \neq 0$$

et les équations (26) pourront s'écrire

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dy'} &= P_1 + P_2y' + P_3z' + \dots,\\ \frac{dy}{dy'} &= P_1y' + P_2y'^2 + P_3y'z' + \dots,\\ \frac{dz}{dy'} &= P_1z' + P_2y'z' + P_3z'^2 + \dots,\\ \frac{dz'}{dy'} &= Q_1 + Q_2y' + Q_3z' + \dots,\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

P_i et Q_i étant des fonctions holomorphes de x, y, z dans le domaine de l'origine. Dans le cas général où les deux cônes T et T' sont simplement tangents suivant l'axe des x, P_1 et Q_1 sont nuls à l'origine mais P_2 est différent de zéro. Les équations (27) admettent un système d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec y' et on aura pour les premiers termes du développement

$$\begin{aligned}x &= \alpha y'^2 + \dots,\\ y &= \beta y'^3 + \dots,\\ z &= \gamma y'^4 + \dots,\\ z' &= \delta y'^2 + \dots\end{aligned}$$

Ces formules mettent en évidence le théorème général démontré plus haut (§7), mais nous voyons de plus que le plan tangent commun aux deux cônes T, T' rencontre la courbe intégrale en quatre points confondus avec l'origine.

Si on suppose maintenant que les deux cônes T et T' aient un contact du second ordre suivant l'axe des x, P_1, P_2 et Q_1 seront nuls pour $x = y = z = 0$, et on voit facilement que les développements des intégrales en séries auront la forme suivante

$$\begin{aligned} x &= \alpha y'^3 + \ldots, \\ y &= \beta y'^4 + \ldots, \\ z &= \gamma y'^5 + \ldots, \\ z' &= \delta y'^2 + \ldots \end{aligned}$$

La courbe intégrale présente à l'origine un point singulier d'espèce supérieure et le plan tangent commun aux deux cônes T, T' rencontre cette courbe en cinq points confondus à l'origine. Etant donné un système quelconque d'équations différentielles simultanées, les points singuliers précédents se présentent d'une manière normale. En effet, pour tout point de la surface $P(x, y, z) = 0$ les deux cônes T et T' ont en général un contact du premier ordre. Si on veut que ces deux cônes aient un contact du second ordre, il faudra joindre à l'équation $P(x, y, z) = 0$ une nouvelle équation de condition qui déterminera avec la première une courbe gauche pour tous les points de laquelle les deux cônes T et T' auront un contact du second ordre.

On examinerait de même le cas où les deux cônes ont un contact d'ordre quelconque, ou le cas où l'un des cônes admet une génératrice double appartenant à l'autre et en général tous les cas où $c\frac{\partial A}{\partial x} - C\frac{\partial a}{\partial x}$ n'est pas nul pour $x = y = z = 0$. Si on avait en même temps $\left(c\frac{\partial A}{\partial x} - C\frac{\partial a}{\partial x}\right) = 0$, tous les dénominateurs des équations (26) seraient nuls pour $x = y = z = y' = z' = 0$, et on ne pourrait plus appliquer la méthode précédente.

Il est facile de voir comment ces résultats se rattachent à la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles. A chaque point de l'espace de coordonnées (x, y, z) les équations (15) font correspondre m directions issues de ce point; les surfaces telles que le plan tangent en chacun de leurs points contienne une des m droites correspondant à ce point seront définies par une équation aux dérivées partielles du premier ordre et du degré m en p, q, qui se décomposera en réalité en m équations linéaires. Les surfaces intégrales s'obtiennent, comme on sait, en associant suivant une loi arbitraire les courbes intégrales des équations (25). Si ces équations n'admettent pas de solutions singulières, comme c'est le

cas général, l'équation aux dérivées partielles n'aura pas non plus de solution singulière. Mais, si les équations (15) admettent des solutions singulières, la surface engendrée par ces courbes donnera une solution singulière de l'équation aux dérivées partielles.

10. *Exemple* I.

$$y - xy' = 0, \quad x^2 z'^2 = x^2 + y^2 - 1.$$

Les deux valeurs de z' deviennent égales pour tous les points du cylindre

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

et la direction définie par la racine double est $z' = 0$, $y' = \frac{y}{x}$, c'est-à-dire la perpendiculaire abaissée du point (x, y) sur l'axe des z. Cette direction n'est pas située dans le plan tangent ou cylindre, qui est par conséquent un lieu de points de rebroussement des courbes intégrales. Il est facile de le vérifier car l'intégrale générale est

$$y = C_1 x, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + C_2.$$

Exemple II. (V. Serret: *Journal de Liouville*, 1ère série, t. XVIII, p. 29).

$$y = xy' + y'^2 + z', \quad z = z'x + y'z'.$$

L'équation $\frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')} = 0$ est ici

$$(x + y')(x + 2y') - z' = 0.$$

En éliminant y' et z' entre ces trois équations, on trouve l'équation d'une surface du sixième ordre

$$[2x^3 + 7xy - 9z]^2 + 2(x^2 + 3y)[12x(z - xy) - 2(x^2 - y)^3] = 0. \quad (28)$$

Il est aisé de voir que, pour tout point de cette surface, les équations (15), (16) et (18) sont compatibles; nous nous trouvons donc dans le cas où il existe des solutions singulières. L'intégrale générale des équations proposées est en effet donnée par les équations

$$\left.\begin{aligned} y &= ax + a^2 + b, \\ z &= bx + ab, \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

où a et b sont deux constantes arbitraires. Les courbes intégrales forment, comme on voit, un système de rayons rectilignes du second ordre et de la troisième classe; ces droites sont des tangentes doubles de la surface (28), qui contiendra par conséquent les arêtes de rebroussement des développables de la congruence. Pour obtenir ces développables, cherchons à déterminer b en fonction de a de façon que les droites représentées par les équations (29) aient une enveloppe. On est conduit ainsi à l'équation différentielle

$$\left(\frac{db}{da}\right)^2 + a\frac{db}{da} - b = 0, \tag{30}$$

dont l'intégrale générale est

$$b = Ca + C^2,$$

C désignant une constante arbitraire. L'arête de rebroussement correspondante aura pour équations

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{(x+C)^2}{4} + C^2, \\ z &= -\frac{C}{4}(x-C)^2, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

l'équation (30) admet en outre l'intégrale singulière,

$$b = -\frac{a^2}{4}$$

et l'arête de rebroussement correspondante est

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}x^3, \\ z &= -\frac{1}{27}x^3. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Les équations proposées admettent, outre l'intégrale générale (29), une infinité d'intégrales singulières représentées par les équations (31) et une intégrale singulière isolée (32) qui est l'enveloppe des premières.

D'une manière générale, considérons le système d'équations simultanées

$$F(y - xy', z - xz', y', z') = 0, \quad \Phi(y - xy', z - xz', y', z') = 0,$$

qui peut être considéré comme une généralisation de l'équation de Clairaut. On vérifie immédiatement que les équations (15), (16) et (18) se réduisent à trois équations distinctes; le système doit donc admettre des intégrales singulières. En effet, l'intégrale générale est formée par les droites de la congruence

$$F(y-ax,\, z-bx,\, a,\, b)=0, \quad \Phi(y-ax,\, z-bx,\, a,\, b)=0,$$

où a et b sont des paramètres arbitraires; les arêtes de rebroussement des développables de la congruence seront les intégrales singulières.

III.

11. Les résultats qui précèdent peuvent être appliqués aux équations différentielles du second ordre. Soit

$$F(x,\, y,\, y',\, y'')=0 \tag{33}$$

une équation du second ordre, où F est un polynôme entier irréductible en x, y, y', y''. Si on pose $y'=z$, l'équation (33) peut être remplacée par le système des deux équations

$$\left.\begin{aligned} F(x,\, y,\, z,\, z')=0, \\ y'-z=0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

L'équation $P(x,\, y,\, z)=0$, obtenue en éliminant z' entre les deux équations

$$F(x,\, y,\, z,\, z')=0, \quad \frac{\partial F}{\partial z'}=0$$

représente en général, nous l'avons vu, le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales du système (34). Si on y remplace z par y' on a une certaine équation différentielle du premier ordre

$$P(x,\, y,\, y')=0, \tag{35}$$

que l'on obtiendrait évidemment en éliminant y'' entre les deux équations

$$F(x,\, y,\, y',\, y'')=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y''}=0,$$

et dont il est aisé, d'après ce qui précède, d'avoir la signification. En effet, soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la surface $P(x,\, y,\, z)=0$; par ce point

passe une courbe intégrale du système (34) ayant un rebroussement en ce point et la droite

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}$$

pour tangente de rebroussement. Cette courbe se projette sur le plan des xy suivant une courbe intégrale de l'équation (33) passant par le point (x, y), ayant un rebroussement en ce point et la droite de coefficient angulaire $y'=z$ pour tangente de rebroussement. Par suite, en chaque point d'une courbe intégrale de l'équation (35) passe une courbe intégrale de l'équation (33) ayant un rebroussement en ce point et la tangente à la première courbe pour tangente de rebroussement.

Ce théorème peut s'établir directement comme il suit. Supposons, ce qu'on peut toujours faire grâce à un changement de coordonnées, que pour $x=y=y'=0$, l'équation (33) ait une racine double $y''=a$. Pour des valeurs de x, y, y' suffisamment voisines de zéro, les deux valeurs de y'' qui deviennent égales seront représentées par un développement de la forme

$$y''=a+(a_1x+b_1y+c_1y'+\ldots.)+\sqrt{a_2x+b_2y+c_2y'+\ldots.}\,; \qquad (36)$$

en posant, comme plus haut, $y'=z$, cette équation peut être remplacée par le système

$$\left.\begin{aligned} z' &= a+(a_1x+b_1y+c_1z+\ldots.)+\sqrt{a_2x+b_2y+c_2z+\ldots.}\,, \\ y' &= z. \end{aligned}\right\}$$

Changeons encore z en $ax+Z$; le système devient

$$\left.\begin{aligned} Z' &= a_1x+b_1y+c_1Z+\ldots.+\sqrt{a_2x+b_2y+c_2Z+\ldots.}\,, \\ y' &= ax+Z. \end{aligned}\right\}$$

A ce système on peut appliquer le théorème du n° 1; car, si on pose

$$x=x'^2, \quad y=x'^2u, \quad Z=x'^2v,$$

il devient

$$\begin{aligned} \frac{x'}{2}\frac{du}{dx'} &= -u+ax'^2+x'^2v, \\ \frac{x'}{2}\frac{dv}{dx'} &= -v+x'^2\{a_1+b_1u+c_1v+\ldots.\}+x'\{a_2+\ldots.\}; \end{aligned}$$

ces équations admettent un système d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x'

$$v = \frac{2a_2}{3} x' + \ldots,$$

$$u = \frac{a}{2} x'^2 + \ldots.$$

Par suite l'équation proposée admet une courbe intégrale tangente à l'axe des x à l'origine des coordonnées et représentée par les équations

$$x = x'^2, \quad y = \frac{a}{2} x'^4 + \alpha x'^5 + \ldots.$$

On voit que l'origine est un point de rebroussement de seconde espèce; ce qu'on pouvait prévoir *a priori* puisque la dérivée seconde doit conserver en ce point une valeur finie. En réunissant tous ces résultats, on peut énoncer la proposition ci-dessous:

Etant donnée une équation différentielle du second ordre $F(x, y, y', y'') = 0$, *en éliminant* y'' *entre cette équation et la relation* $\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$, *on obtient une certaine équation différentielle du premier ordre* $P(x, y, y') = 0$, *dont les intégrales possèdent, en général, la propriété suivante. Par chaque point* M *d'une de ces courbes intégrales* C *il passe une courbe intégrale de l'équation* $F = 0$, *ayant un rebroussement de seconde espèce en* M *et la tangente en ce point à la courbe* C *pour tangente de rebroussement.*

On démontrerait aisément la proposition suivante, qui complète en quelque sorte la première:

En égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y'' *dans l'équation* $F(x, y, y', y'') = 0$, *on obtient une certaine équation différentielle du premier ordre* $Q(x, y, y') = 0$ *dont les courbes intégrales sont telles qu'en général par un point quelconque* M *de l'une d'elles* C *il passe une courbe intégrale de l'équation* $F = 0$, *ayant en* M *un rebroussement de première espèce et la tangente en ce point à la courbe* C *pour tangente de rebroussement.*

Si l'un des polynômes $P(x, y, y')$, $Q(x, y, y')$ ne contient pas y', on devra regarder, suivant les idées de Clebsch, l'intégrale correspondante comme se composant d'un point quelconque de la courbe $P(x, y) = 0$ ou $Q(x, y) = 0$ et de toutes les droites passant par ce point.

12. Nous avons supposé jusqu'ici que le système auxiliaire (34) n'admet pas de solutions singulières. S'il en est autrement, toutes ces solutions singulières seront situées sur la surface $P(x, y, z)=0$ et leurs projections sur le plan des xy auront pour équation différentielle

$$P(x, y, y')=0.$$

Par chaque point de la surface $P(x, y, z)=0$ passent deux courbes intégrales du système (34) tangentes l'une à l'autre, dont les projections sur le plan des xy sont des courbes intégrales de l'équation (33) et, comme les valeurs de y' et de z' sont les mêmes pour les deux courbes dans l'espace, leurs projections sur le plan des xy auront un contact du second ordre. On voit donc que l'équation (33) admettra dans ce cas une infinité d'intégrales définies par une équation du premier ordre $P(x, y, y')=0$ qui ont un contact du second ordre en chacun de leurs points avec une autre courbe intégrale.

Les solutions singulières de l'équation (33) peuvent aussi être définies directement, sans passer par l'intermédiaire du système simultané (34). Nous dirons qu'une intégrale de cette équation est singulière si pour tout point de cette intégrale la valeur correspondante de y'' est racine multiple de l'équation $F(x, y, y', y'')=0$. Il résulte de cette définition que de pareilles intégrales, si elles existent, devront vérifier l'équation $P(x, y, y')=0$ obtenue en éliminant y'' entre les équations $F=0$ et $\frac{\partial F}{\partial y''}=0$. On sera ramené à rechercher s'il existe des intégrales communes aux deux équations

$$F(x, y, y', y'')=0, \quad P(x, y, y')=0,$$

ce qu'on pourra toujours faire par des calculs algébriques. Si l'équation $F=0$ est quelconque, ces deux équations n'auront pas d'intégrales communes et il n'existera pas de solutions singulières. Nous venons de voir quelle sera la propriété géométrique des courbes intégrales de l'équation $P=0$. Mais, si les intégrales de l'équation $P=0$ appartiennent à l'équation $F=0$, on pourra démontrer directement, comme plus haut, que ces courbes ont en chacun de leurs points un contact du second ordre avec une autre courbe intégrale.

La recherche des solutions singulières peut être facilitée par l'application de la régle suivante. Il est clair d'abord que, s'il existe des solutions singulières, elles doivent satisfaire aux trois équations

$$F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y''}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''=0.$$

Inversement, si pour tous les points d'une courbe C ces trois équations admettent une solution commune en y'', cette courbe est une solution singulière. En effet soit m la racine commune aux trois équations

$$F(x, y, y', m) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} m = 0;$$

quand on se déplace sur la courbe C, y, y', m sont des fonctions de x dont les dérivées vérifient la relation suivante

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial m} \frac{dm}{dx} = 0,$$

qui, comparée avec les premières, se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial y'} (y'' - m) = 0.$$

On aura donc $y'' = m$, à moins que l'on n'ait aussi $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$.

Remarque. Si l'équation $F = 0$ admet des solutions singulières définies par l'équation du premier ordre $P = 0$, cette équation $P = 0$ pourra avoir elle-même une solution singulière et cette solution singulière n'appartiendra pas en général à l'équation $F = 0$. Car cette solution n'a en général qu'un contact du premier ordre avec les autres intégrales de $P = 0$.

13. *Exemple* I. $$y''^2 - 2y'y'' + 1 = 0.$$

L'équation $P(x, y, y') = 0$ est ici $y'^2 - 1 = 0$; l'intégrale générale se compose de lignes droites

$$y = \pm x + C,$$

et il est facile de vérifier que ces lignes droites sont des lieux de points de rebroussement de seconde espèce pour les courbes intégrales de l'équation proposée ; l'intégrale générale, que l'on trouve aisément, est en effet représentée par les équations

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p^2-1}{2} - \frac{1}{2} p\sqrt{p^2-1} + \frac{1}{2} L(p + \sqrt{p^2-1}) + C_1, \\ y &= \frac{p^3-1}{3} - \frac{(p^2-1)\sqrt{p^2-1}}{3} + C_2. \end{aligned}\right\}$$

Exemple II.

$$(1 + x^2) y''^2 - \left(2xy' + \frac{x^2}{2}\right) y'' + y'^2 + xy' - y = 0.^* \qquad (37)$$

* Lagrange, *Leçons sur le calcul des fonctions.* Serret, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 395.

Les deux valeurs de y'' deviennent égales si on a

$$y'^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right) y' - (1 + x^2)\, y - \frac{x^4}{16} = 0. \tag{38}$$

On vérifie sans difficulté que les intégrales de l'équation (38) vérifient l'équation (37); il y a donc des solutions singulières. L'intégrale générale de l'équation (37) est en effet

$$y = ax^2 + bx + 4a^2 + b^2$$

et celle de l'équation (38)

$$\sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1 + x^2} - \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = H.$$

L'équation (38) admet en outre une intégrale singulière

$$y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}$$

qui n'appartient pas à l'équation (37).

14. Il est aisé d'étendre ces considérations à des systèmes d'un nombre quelconque d'équations du premier ordre tels que

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y_1, y_2, \ldots. y_n;\ y_1', y_2', \ldots. y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots. y_n;\ y_1', y_2', \ldots. y_n') = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots. y_n;\ y_1', y_2', \ldots. y_n') = 0. \end{array}\right\} \tag{39}$$

Appelons *point* dans l'espace à $(n+1)$ dimensions tout système de valeurs particulières $x_0, y_1^0, \ldots. y_n^0$ attribuées aux variables x, y_i, *courbe* l'ensemble des points dont les *coordonnées* sont fonctions d'une seule variable indépendante, *surface* l'ensemble des points qui vérifient une seule relation

$$\Phi(x, y_1, y_2, \ldots. y_n) = 0.$$

Tant que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots. F_n)}{D(y_1', y_2', \ldots. y_n')}$$

sera différent de zéro, on pourra résoudre les équations (39) par rapport à $y_1', y_2', \ldots. y_n'$ et appliquer le théorème fondamental de Cauchy. Mais il n'en

sera plus de même si ce déterminant est nul. En éliminant $y'_1, \ldots . y'_n$ entre les équations (39) et l'équation

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots . F_n)}{D(y'_1, y'_2, \ldots . y'_n)} = 0, \tag{40}$$

on obtient une certaine surface

$$P(x, y_1, y_2, \ldots . y_n) = 0. \tag{41}$$

En général, par chaque point de cette surface passe une courbe intégrale présentant en ce point une singularité que l'on peut définir comme il suit; par une substitution linéaire convenable, $x, y_1, \ldots . y_n$ sont représentées par des développements de la forme

$$\begin{aligned} x &= t^2, \\ y_1 &= \alpha_1 t^3 \quad + \ldots . , \\ y_2 &= \alpha_2 t^4 \quad + \ldots . , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \alpha_n t^{n+2} + \ldots . \end{aligned}$$

Si, en chaque point de cette surface, la direction particulière définie par les équations (39) et (40) est située dans la *variété linéaire* à n dimensions tangente à cette surface, les conclusions sont tout-à-fait différentes. La surface $P = 0$ est un lieu d'intégrales singulières, que l'on peut définir par un système de $(n-1)$ équations différentielles du premier ordre ou, ce qui revient au même, par une équation différentielle unique d'ordre $(n-1)$.

Pour appliquer cette théorie à un exemple, reprenons un des problèmes traités par Serret;* proposons-nous de déterminer une courbe gauche, connaissant la courbe lieu des centres de courbure. Si on choisit x comme variable indépendante, on aura à rechercher les intégrales de deux équations différentielles du second ordre

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, y', z', y'', z'') &= 0, \\ \Phi(x, y, z, y', z', y'', z'') &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

---

* *Journal de Liouville*, 1ère Série, t. XVIII, p. 23.

ce système peut être remplacé par le suivant, qui ne contient que les dérivées du premier ordre

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, z, u, v, u', v') = 0, \\ &\Phi(x, y, z, u, v, u', v') = 0, \\ &y' - u = 0, \\ &z' - v = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

L'intégrale générale doit contenir quatre constantes arbitraires; or on connaît immédiatement des courbes intégrales répondant à la question, les cercles qui ont leur centre en un point quelconque de la courbe donnée C. En dehors de ces solutions, évidentes *a priori*, il existe d'autres courbes répondant à la question que l'on pourra définir directement. Considérons une développable passant par la courbe C; cette développable sera définie si on se donne l'angle ϕ que fait en un point quelconque M de C le plan tangent à cette développable avec le plan osculateur à la courbe C en ce point. Soit D une développable obtenue ainsi, et G la génératrice passant en M. Toute courbe gauche répondant à la question peut évidemment être considérée comme l'arête de rebroussement de la surface enveloppe d'un plan P mené par M perpendiculairement à la génératrice G d'une certaine développable D; et il faudra de plus que le point de contact du plan P avec son enveloppe soit situé dans le plan tangent à la développable D suivant la génératrice G. En exprimant cette propriété, on est conduit, il est facile de s'en assurer, à une équation différentielle du troisième ordre dont les intégrales fournissent la véritable solution du problème proposé. Ces courbes correspondent à des solutions singulières du système (43); en effet, par chaque point de l'une d'elles passe une courbe intégrale ayant avec elle un contact du second ordre, le cercle osculateur lui-même, et pour ces deux intégrales $x, y, z, u, v, y', z', u', v'$ auront les mêmes valeurs.

On peut encore s'en rendre compte autrement. Cherchons les courbes intégrales passant par un point donné M de l'espace et tangentes à une droite donnée MM' passant par ce point. Autrement dit, cherchons les intégrales du système (43) qui correspondent à des valeurs initiales données de x, y, z, u, v. Pour cela, au point M nous mènerons le plan P perpendiculaire à la droite MM', et nous prendrons les points d'intersection $0_1, 0_2, \ldots . 0_p$ de ce plan avec la courbe C; si ces p points sont distincts, ce qui est le cas général, les seules courbes répondant à la question seront les cercles décrits des points $0_1, 0_2, \ldots . 0_p$ comme

centres et tangents à la droite MM'. Pour qu'il y ait une véritable courbe intégrale tangente en M à la droite MM', il faudra que le plan P soit tangent à la courbe C; par suite deux des systêmes de valeurs de u', v', fournies par les équations (43) seront venu se confondre: ce qui est la propriété caractéristique des solutions singulières.

15. Prenons encore une équation unique d'ordre n

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0, \tag{44}$$

ou F désigne une fonction entière de $x, y, y', \dots y^{(n)}$; si, pour

$$x = x_0, \ y = y_0, \dots y^{n-1} = y_0^{n-1},$$

l'équation (44) admet une racine multiple $y^n = y_0^n$, on ne peut plus appliquer les théorèmes généraux. Pour trouver la singularité correspondante de l'intégrale, imaginons, ce qu'on peut toujours faire, que cette circonstance se présente pour les valeurs initiales $x_0 = y_0 = y_0' = 0$; et supposons d'abord que l'on ait aussi $y_0'' = y_0''' = \dots = y_0^n = 0$, la valeur de $y^{(n)}$ qui se réduit à zéro étant racine double seulement. Les deux valeurs de $y^{(n)}$ qui deviennent nulles seront représentées par un développement de la forme

$$y^{(n)} = a_1x + a_2y + a_3y' + \dots + a_{n+1}y^{(n-1)} + \dots + \sqrt{b_1x + b_2y + b_3y' + \dots} \tag{45}$$

Posons
$$y' = u_1, \ y'' = u_2, \dots y^{(n-1)} = u_{n-1};$$

on peut remplacer l'équation (45) par le systême

$$\left.\begin{aligned} y' &= u_1, \\ u_1' &= u_2, \\ &\dots\dots \\ u_{n-2}' &= u_{n-1}, \\ u_{n-1}' &= a_1x + a_2y + a_3u_1 + \dots + \sqrt{b_1x + b_2y + b_3u_1 + \dots} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Faisons encore le changement de variables

$$x = x'^2, \ y = x'^2 Y, \ u_1 = x'^2 U_1, \dots u_{n-1} = x'^2 U_{n-1};$$

le système (46) devient

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x'}{2}\frac{dY}{dx'}+Y=x'^2U_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{x'}{2}\frac{dU_{n-2}}{dx'}+U_{n-2}=x'^2U_{n-1},\\
&\frac{x'}{2}\frac{dU_{n-1}}{dx'}+U_{n-1}=x'^2\{a+a_1Y+\dots\}+x'\{b^{\frac{1}{2}}+\dots\}
\end{aligned}\right\}\qquad(47)$$

D'après le théorème général du n° 1, ce système admet un système d'intégrales holomorphes s'évanouissant avec x', et on vérifie aisément que le développement de Y commencera par un terme en $(x')^{2n+1}$. On aura donc pour y un développement suivant les puissances de $x^{\frac{1}{2}}$ de la forme suivante

$$y=\alpha x^{n+\frac{1}{2}}+\beta x^{n+1}+\gamma x^{n+\frac{3}{2}}+\dots.$$

Supposons maintenant que pour $x=y=y'=0$, $y''=y_0''\dots.\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$, l'équation (44) admette une racine double $y^{(n)}=y_0^{(n)}$. On ramènera ce cas au précédent en posant

$$y=\frac{y_0''}{2}x^2+\frac{y_0'''}{1.2.3}x^3+\dots.+\frac{y_0^{(n)}}{1.2\dots.n}x^n+z;$$

on en conclut que le développement de y sera de la forme

$$y=\frac{y_0''}{2}x^2+\frac{y_0'''}{1.2.3}x^3+\dots.+\frac{y_0^{(n)}}{1.2\dots.n}x^n+\alpha x^{n+\frac{1}{2}}+\beta x^{n+1}+\dots.\qquad(48)$$

La courbe intégrale présente à l'origine un point singulier d'espèce particulière, analogue à un point de rebroussement de seconde espèce.

Pour que l'équation (44) ait une racine double en $y^{(n)}$, il faut que l'on ait en même temps

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0;$$

l'élimination de $y^{(n)}$ entre ces deux équations conduit à une relation entre y et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$.

$$\Phi(x,\,y,\,y',\dots.\,y^{(n-1)})=0.\qquad(49)$$

D'après ce que nous venons de voir, les courbes intégrales de cette équation (49) possèdent la propriété suivante. En chaque point M de l'une d'elles C, *il passe une courbe intégrale de l'équation proposée* (44) *ayant avec la courbe* C *un contact d'ordre* $n-1$ *et présentant en ce point un point singulier de l'espèce caractérisée par le développement* (48).

Si les intégrales de l'équation (49) vérifient aussi l'équation (44), ce qui ne peut avoir lieu que dans des cas particuliers, ces intégrales seront des intégrales *singulières*. On démontrerait comme précédemment qu'en chaque point de l'une d'elles passe une seconde courbe intégrale ayant un contact d'ordre n avec l'intégrale singulière.

PARIS, Janvier 1889.